Aufgabe 1 *(Abstrakte Reduktionssysteme)* (5 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt kein abstraktes Reduktionssystem $(A, \to)$ mit $A \neq \emptyset$, so daß jedes $a \in A$ mindestens zwei Normalformen hat.

Aufgabe 2 *(E-Algebren)* (4 + 4 = 8 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ und $\Omega = \{a/0,\ b/0,\ c/0,\ f/1\}$; sei E die Menge der (implizit allquantifizierten) Gleichungen $\{\, a \approx f(b),\ f(f(x)) \approx f(f(y)) \,\}$.

Teil (a)

Geben Sie eine mögliche Herleitung der Aussage $E \vdash f(a) \approx f(f(f(z)))$ an.

Teil (b)

Ist das Universum der initialen E-Algebra $\mathrm{T}_\Sigma(\emptyset)/E$ endlich oder unendlich? Falls es endlich ist, wieviele Elemente hat es?

Aufgabe 3 *(Rewrite-Ordnungen)* (6 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine Σ-Algebra; sei $>_1$ eine strikte partielle Ordnung auf ihrem Universum, so daß die Interpretation $f_\mathcal{A}$ jedes Funktionssymbols f monoton bezüglich $>_1$ ist. Sei $>_2$ eine strikte partielle Ordnung auf $\mathrm{T}_\Sigma(X)$, die kompatibel mit Σ-Operationen ist.
Definieren Sie die Ordnung $>_{12}$ über $\mathrm{T}_\Sigma(X)$ durch

$$
\begin{array}{lcl}
s >_{12} t & \Leftrightarrow & \mathcal{A}(\alpha)(s) >_1 \mathcal{A}(\alpha)(t) \text{ für alle } \alpha : X \to U_\mathcal{A} \\
& & \text{oder } \mathcal{A}(\alpha)(s) \geq_1 \mathcal{A}(\alpha)(t) \text{ für alle } \alpha : X \to U_\mathcal{A} \text{ und } s >_2 t.
\end{array}
$$

Zeigen Sie, daß $>_{12}$ kompatibel mit Σ-Operationen ist.

Aufgabe 4 *(Lexikographische Pfadordnungen)* (6 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ und $\Omega = \{f/1,\ g/1,\ h/2,\ k/1\}$; sei R das folgende Termersetzungssystem:

$$
\begin{aligned}
h(y, f(x)) &\to h(k(x), x), \\
k(g(x)) &\to f(x), \\
k(k(x)) &\to h(x, x)
\end{aligned}
$$

Geben Sie eine Präzedenz $>$ auf Ω an, so daß $\to_R \subseteq >_{\mathrm{lpo}}$ gilt, wobei das Funktionssymbol h lexikographischen Status von links nach rechts hat.

Aufgabe 5 *(Kritische Paare)* (7 Punkte)

Sei R das folgende Termersetzungssystem:

$$\begin{aligned} g(f(x,x)) &\to g(x), \\ f(g(y),g(a)) &\to b, \\ a &\to f(b,b) \end{aligned}$$

Berechnen Sie alle kritischen Paare zwischen Regeln in R und überprüfen Sie, ob diese zusammenführbar („joinable“) in R sind.

Aufgabe 6 *(Superpositionskalkül)* (6 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel einer Signatur Σ, einer Reduktionsordnung $>$, die total auf Σ-Grundtermen ist, und einer Menge N von zwei Grundklauseln, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $R_\infty \neq \emptyset$,
- alle Klauseln in N sind wahr in R_∞, und
- N ist nicht bis auf Redundanz saturiert.