Aufgabe 1 *(Unifikation)* (6 Punkte)

Berechnen Sie für jedes dieser Unifikationsprobleme entweder einen allgemeinsten Unifikator („mgu") oder zeigen Sie, daß es nicht unifizierbar ist:

$$E_1 = \{f(g(x), x) =^? f(y, h(y))\}$$
$$E_2 = \{h(a, z, z, b) =^? h(x, x, y, y)\}$$
$$E_3 = \{g(x, f(x)) =^? g(y, z),\ g(x', x') =^? g(y, f(z'))\}$$

Aufgabe 2 *(Wohlfundierte Ordnungen)* (6 Punkte)

Sei $(A, >)$ eine wohlfundierte partielle Ordnung, sei $f : A \to A$ eine monotone Funktion (das heißt, $x > y$ impliziert $f(x) > f(y)$ für alle Elemente $x, y \in A$). Beweisen Sie: Falls $x \geq f(x)$ für alle $x \in A$, dann ist $x = f(x)$ für alle $x \in A$.

Aufgabe 3 *(Reduktionsordnungen)* (8 Punkte)

Die echte Subtermrelation $\rhd$ ist definiert durch

$s \rhd t$ genau dann, wenn ein $p \in \mathrm{Pos}(s)$ existiert, so daß $p \neq \varepsilon$ und $s/p = t$.

Ist die echte Subtermrelation eine Reduktionsordnung? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 4 *(Multimengen)* (4 + 4 = 8 Punkte)

Sei $N = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$ eine Menge von Multimengen von Multimengen:

$$M_1 = \{\{a_4\}, \{a_4\}, \{a_1\}, \{a_1\}\}$$
$$M_2 = \{\{a_2\}, \{a_1\}, \{a_1\}\}$$
$$M_3 = \{\{a_3, a_1\}\}$$
$$M_4 = \{\{a_4, a_3\}, \{a_3, a_2\}, \{a_2, a_1, a_1\}\}$$
$$M_5 = \{\{a_2\}, \{a_1, a_1\}, \emptyset\}$$

Part (a)

Sei die Ordnung $\succ$ definiert durch $a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1$, sei $\succ_m$ die Multimengenerweiterung von $\succ$, und sei $\succ_{mm}$ die Multimengenerweiterung von $\succ_m$. Sortieren Sie die Elemente von N bezüglich $\succ_{mm}$.

Part (b)

Finden Sie eine andere totale Ordnung $\succ'$ auf $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, so daß M_3 maximal und M_1 minimal in N bezüglich $\succ'_{mm}$ ist, wobei $\succ'_{mm}$ die zweifache Multimengenerweiterung von $\succ'$ ist.

Aufgabe 5 *(Konfluenz)* (10 Punkte)

Für ein Termersetzungssystem („TRS“) R definieren wir $\mathrm{LSymb}(R)$ als die Menge aller Funktionssymbole, die in den linken Seiten von Regeln in R vorkommen. Formal:

$$\mathrm{LSymb}(R) = \bigcup_{l \to r \in R} \mathrm{Symb}(l),$$

wobei $\mathrm{Symb}(x) = \emptyset$ und $\mathrm{Symb}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{f\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Symb}(t_i)$.
Zeigen Sie: Falls R_1 und R_2 konfluente Termersetzungssysteme sind, $R_1 \cup R_2$ terminiert, und $\mathrm{LSymb}(R_1) \cap \mathrm{LSymb}(R_2) = \emptyset$ ist, dann ist auch $R_1 \cup R_2$ konfluent.