

# Mengen und Mengenoperationen

---

Es ist prinzipiell nicht möglich, den fundamentalen Begriff der Menge streng mathematisch zu definieren.

# Mengen und Mengenoperationen

---

## Erklärung (Cantor, 1985)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, wobei von jedem dieser Objekte eindeutig feststeht, ob er zur Menge gehört oder nicht.

Die Objekte der Menge heißen Elemente der Menge.

**Elementrelation:**  $a \in A$

Gehört  $a$  nicht zu  $A$ :  $\neg(a \in A)$  (i.Z. auch  $a \notin A$ )

# Russell'sches Paradox

---

**Problem 1.** Ist  $A = \dots \{\{\{1\}\}\} \dots$  (unendlich viele Klammern) eine Menge oder nicht? Falls man  $A$  als Menge zuläßt, so gilt  $A = \{A\}$ , also  $A \in A$ .

Betrachten man nur die “braven” Mengen, die  $A \in A$  nicht erfüllen, so erhält man:

**Problem 2. (Russell'sches Paradox)** Sei  $M = \{A \mid A \notin A\}$

$M$  ist nach Cantor eine Menge. Nun gilt aber:

- (i) Falls  $M \in M$ , so erfüllt  $M$  die Eigenschaft  $M \notin M$ . Widerspruch.
- (ii) Falls  $M \notin M$ , so erfüllt  $M$  die charakteristische Eigenschaft von  $M$ , d.h.  $M \in M$ . Widerspruch.

# Klassen und Mengen

---

Klasse: alles, was nach Cantor eine Menge ist.

Als “Mengen” nur gewisse Klassen zugelassen

↳ **Axiomatische Mengenlehre**

## Idee

Die Bildung der Mengen ist erst dann erlaubt, wenn ihre Elemente bereits gebildet sind.

## Wohlfundiertheitsaxiom

Es gibt keine unendliche Folgen  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

mit  $x_{n+1} \in x_n$  für alle  $n$

# Mengen: Begriffe

---

**Menge:** Zusammenfassung von Objekten

Die Konstituenten der Menge: **Elemente** der Menge

i.Z.  $a \in A$

**Endliche Menge:** Menge, die nur endlich viele Elemente hat.

**Unendliche Menge:** Menge, die unendlich viele Elemente hat.

# Mengen: Begriffe

---

## Bemerkungen

Keine Anordnung für die Elementen

Es ist wichtig, zwischen einer Menge und ihren Beschreibungen zu unterscheiden

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 1, 3\}, \quad \{1, 2, 3, 1\}$$

drei verschiedene Beschreibungen ein und derselben Menge.

# Kardinalität

---

Anzahl der Elemente einer Menge  $M$  heisst **Mächtigkeit** oder **Kardinalität**, und wird durch  $\#M$ ,  $|M|$ , oder auch  $\text{card}(M)$  bezeichnet.

# Mengen: Begriffe

---

Darstellung mittels definierenden Eigenschaften

## Mengenbildungsaxiom

Zu einer Aussagenform  $E(x)$  über einem fest vorgegebenen Universum  $U$  (wo  $U$  eine Menge ist) existiert stets genau eine Menge  $M$ , die gerade aus allen Objekten  $x$  aus  $U$  besteht, für welche  $E(x)$  eine wahre Aussage ist.

Jedes Element  $e$  von  $U$  mit  $E(e)$  wahr heißt **Element von  $M$** .

$E(x)$  heißt **erzeugende Aussagenform** von  $M$ ,

**Bezeichnung:**  $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U \mid E(x)\}$



# Gleichheit von Mengen

---

## Gleichheitsaxiom (Extensionalitätsaxiom)

Mengen  $M_1$  und  $M_2$  sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Ist  $E_1(x)$  eine erzeugende Aussagenform von  $M_1$  (über  $U$ ) und  $E_2(x)$  eine erzeugende Aussagenform von  $M_2$  (über  $U$ ), so gilt:

$$M_1 = M_2 \quad \text{gdw.} \quad \forall x : (E_1(x) \Leftrightarrow E_2(x)) \text{ wahr ist.}$$