2.10 Widersprunchsvollständigkeit der Resolution

Zu Beweisen: $N \models \bot \Rightarrow N \vdash_{Res} \bot$.
Äquivalent: Falls $N \not\vdash_{Res} \bot$, so N erfüllbar.

Idee:

- Annahme: genug Inferenzen berechnet; $\bot$ nicht bewiesen
- Ordne die Klauseln in N bzgl. einer Ordnung $\succ$ (total, wohlfundiert)
- Betrachte die Klauseln bzgl. $\succ$ (zuerst die kleinen, dann die grösseren).
- Bilde (inkrementell) eine Reihe von Herbrandinterpretationen
- Die Limit-Interpretation ist ein Herbrand Modell für N

Klauselordnungen

1. Wir geben die Ordnung $\succ$ auf Grundatomen total und wohlfundiert vor.

   (Es gibt viele solcher Ordnungen, z.B. die längenbasierte Ordnung auf Atomen, aufgefaßt als Wörter über einem geeignet gewählten Alphabet.)

2. Erweiterung auf Literale Vz A, Vz $\in \{\neg, <\mathit{leer}>\}$:

$$\text{Vz}\, A \succ_L \text{Vz}'\, A' \;:\Leftrightarrow\; A \succ A'$$

$$\text{oder } A = A' \text{ und Vz} = \neg \text{ und Vz}' \text{ leer}$$

3. Erweiterung zu einer Ordnung $\succ_C$ auf Grundklauseln:
   $\succ_C = (\succ_L)_{mul}$, die MM-Erweiterung der Literalordnung $\succ_L$.

Notation: $\succ$ auch für $\succ_L$ und $\succ_C$.

Beispiel

Sei $B_2 \succ A_2 \succ B_1 \succ A_1 \succ B_0 \succ A_0$. Dann:

$$\begin{array}{c} A_0 \vee B_0 \\ \prec \\ B_0 \vee A_1 \\ \prec \\ \neg B_0 \vee A_1 \\ \prec \\ \neg B_0 \vee A_2 \vee B_1 \\ \prec \\ \neg B_0 \vee \neg A_2 \vee B_1 \\ \prec \\ \neg B_2 \vee B_2 \end{array}$$

Eigenschaften der Klauselordnung

Proposition 2.20 *1. Literal- und Klauselordnung sind totale und wohlfundierte Ordnungen.*

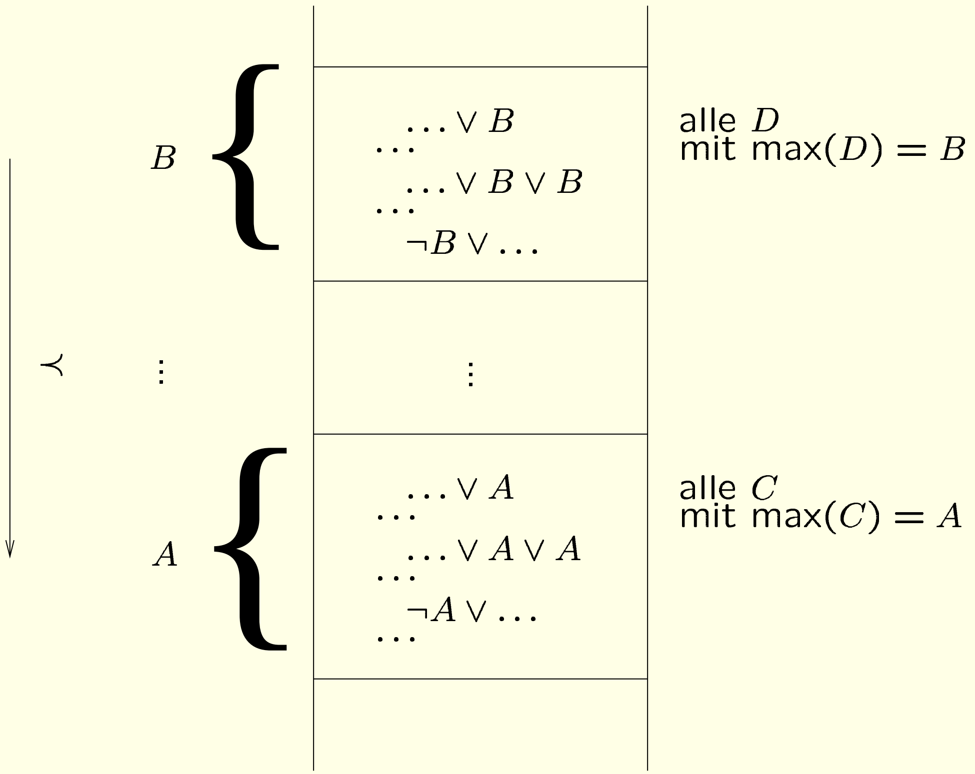
2. Sei $A = \max(C)$, $B = \max(D)$, C, D Klauseln, wobei $\max(C)$ das maximale Atom in C bezeichne.

(i) Falls $A \succ B$ dann $C \succ D$.

(ii) Falls $A = B$, A negativ in C und nur positiv in D, dann $C \succ D$.

Geschichteter Aufbau von Klauselmengen

Sei $A \succ B$. Dann ist der Aufbau einer Klauselmenge folgendermaßen geschichtet:



Abschluß einer Klauselmenge unter *Res*

$$
\begin{aligned}
\mathit{Res}(N) &= \{C \mid C \text{ ist Konklusion einer Inferenz mit Prämissen aus } N\} \\
\mathit{Res}^0(N) &= N \\
\mathit{Res}^{n+1}(N) &= \mathit{Res}(\mathit{Res}^n(N)) \cup \mathit{Res}^n(N), \text{ für } n \geq 0 \\
\mathit{Res}^*(N) &= \bigcup_{n \geq 0} \mathit{Res}^n(N)
\end{aligned}
$$

N heißt saturiert (unter Resolution), falls $N = \mathit{Res}(N) \cup N$.

Abschluß einer Klauselmenge unter *Res*

Proposition 2.21 *(i) $Res^*(N)$ ist saturiert.*

(ii) Res ist widerspruchsvollständig, gdw. für jede Menge N von Grundklauseln:

$$N \models \bot \quad \Leftrightarrow \quad \bot \in Res^*(N)$$

Konstruktion von Interpretationen

Gegeben: Menge N von Grundklauseln, Atomordnung $\succ$.

Gesucht: Herbrand-Interpretation I, so daß

- “viele” Klauseln aus N in I wahr sind;
- $I \models N$, falls N saturiert und $\bot \notin N$.

Konstruktion von Interpretationen

So wird's gehen ($B_2 \succ A_2 \succ B_1 \succ A_1 \succ B_0 \succ A_0$), max. Atome rot:

	Klauseln C	I_C	Δ_C	Bemerkung
	$\neg A_0$	$\emptyset$	$\emptyset$	wahr in I_C
$\prec$	$A_0 \vee B_0$	$\emptyset$	$\{B_0\}$	B_0 maximal
$\prec$	$B_0 \vee A_1$	$\{B_0\}$	$\emptyset$	wahr in I_C
$\prec$	$\neg B_0 \vee A_1$	$\{B_0\}$	$\{A_1\}$	A_1 maximal
$\prec$	$\neg B_0 \vee A_2 \vee B_1 \vee A_0$	$\{B_0, A_1\}$	$\{A_2\}$	A_2 maximal
$\prec$	$\neg B_0 \vee \neg A_2 \vee B_1$	$\{B_0, A_1, A_2\}$	$\emptyset$	B_1 nicht maximal; minimales Gegenbeispiel
$\prec$	$\neg B_0 \vee B_2$	$\{B_0, A_1, A_2\}$	$\{B_2\}$	

$I = \{B_0, A_1, A_2, B_2\}$ kein Modell der Klauselmenge ($\exists$ Gegenbeispiel).

Resolution reduziert Gegenbeispiele

$$\frac{\neg B_0 \vee A_2 \vee B_1 \vee A_0 \qquad \neg B_0 \vee \neg A_2 \vee B_1}{\neg B_0 \vee \neg B_0 \vee B_1 \vee B_1 \vee A_0}$$

Neukonstruktion von I mit erweiterter Klauselmenge:

Klauseln C	I_C	Δ_C	
$\neg A_0$	$\emptyset$	$\emptyset$	
$A_0 \vee B_0$	$\emptyset$	$\{B_0\}$	
$B_0 \vee A_1$	$\{B_0\}$	$\emptyset$	
$\neg B_0 \vee A_1$	$\{B_0\}$	$\{A_1\}$	
$\neg B_0 \vee \neg B_0 \vee B_1 \vee B_1 \vee A_0$	$\{B_0, A_1\}$	$\emptyset$	B_1 kommt mehrfach vor
			minimales Gegenbeispiel
$\neg B_0 \vee A_2 \vee B_1 \vee A_0$	$\{B_0, A_1\}$	$\{A_2\}$	
$\neg B_0 \vee \neg A_2 \vee B_1$	$\{B_0, A_1, A_2\}$	$\emptyset$	Gegenbeispiel
$\neg B_0 \vee B_2$	$\{B_0, A_1, A_2\}$	$\{B_2\}$	

Dasselbe I, aber kleineres Gegenbeispiel als vorher.

Faktorisierung reduziert Gegenbeispiele

$$\frac{\neg B_0 \vee \neg B_0 \vee B_1 \vee B_1 \vee A_0}{\neg B_0 \vee \neg B_0 \vee B_1 \vee A_0}$$

Neukonstruktion von I mit erweiterter Klauselmenge:

Klauseln C	I_C	Δ_C	
$\neg A_0$	$\emptyset$	$\emptyset$	
$A_0 \vee B_0$	$\emptyset$	$\{B_0\}$	
$B_0 \vee A_1$	$\{B_0\}$	$\emptyset$	
$\neg B_0 \vee A_1$	$\{B_0\}$	$\{A_1\}$	
$\neg B_0 \vee \neg B_0 \vee B_1 \vee A_0$	$\{B_0, A_1\}$	$\{B_1\}$	
$\neg B_0 \vee \neg B_0 \vee B_1 \vee B_1 \vee A_0$	$\{B_0, A_1, B_1\}$	$\emptyset$	
$\neg B_0 \vee A_2 \vee B_1$	$\{B_0, A_1, B_1\}$	$\emptyset$	wahr in I_C
$\neg B_0 \vee \neg A_2 \vee B_1$	$\{B_0, A_1, B_1\}$	$\emptyset$	wahr in I_C
$\neg B_1 \vee B_2$	$\{B_0, A_1, B_1\}$	$\{B_2\}$	

Neues $I = \{B_0, A_1, B_1, B_2\}$ ist Modell der Klauselmenge.

Konstruktion von Modellkandidaten: formal

Seien $N, \succ$ gegeben. Wir definieren Mengen I_C und Δ_C für alle Grundklauseln C über der gegebenen Signatur induktiv über $\succ$:

$$I_C := \bigcup_{C \succ D} \Delta_D$$

$$\Delta_C := \begin{cases} \{A\}, & \text{falls } C \in N,\ C = C' \vee A,\ A \succ C',\ I_C \not\models C \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Insgesamt sei damit der Modellkandidat für N:

$$I_N^{\succ} := \bigcup_C \Delta_C$$

Wir schreiben I_N oder einfach I für $I_N^{\succ}$, falls $N, \succ$ irrelevant oder bekannt.

Wir sagen, C produziert A, falls $\Delta_C = \{A\}$.

Geschichteter Aufbau von Klauselmengen

Sei $A \succ B$. Dann ist der Aufbau einer Klauselmenge folgendermaßen geschichtet:

	B	$\ldots \vee B$ $\ldots$ $\ldots \vee B \vee B$ $\ldots$ $\neg B \vee \ldots$	alle D mit $\max(D) = B$
$\prec$	$\vdots$	$\vdots$	
	A	$\ldots \vee A$ $\ldots$ $\ldots \vee A \vee A$ $\ldots$ $\neg A \vee \ldots$ $\ldots$	alle C mit $\max(C) = A$

Monotone Konstruktion: Produktion von neuen Atomen ändert den Wahrheitswert von kleineren Klauseln nicht.

Eigenschaften der Konstruktion

Proposition 2.22 *1.* $C = \neg A \vee C' \;\Rightarrow\;$ *kein* $D \succeq C$ *produziert* A.

2. C *produktiv* $\;\Rightarrow I_C \cup \Delta_C \models C$.

3. *Sei* $D' \succ D \succeq C$.

   $I_D \cup \Delta_D \models C \;\Rightarrow I_{D'} \cup \Delta_{D'} \models C \;\Rightarrow I_N \models C$.

   Falls $C \in N$ *oder* $\max(D) \succ \max(C)$:

   $I_D \cup \Delta_D \models C \;\Leftarrow I_{D'} \cup \Delta_{D'} \models C \;\Leftarrow I_N \models C$.

4. *Sei* $D' \succ D \succ C$.

   $I_D \models C \;\Rightarrow I_{D'} \models C \;\Rightarrow I_N \models C$.

   Falls $C \in N$ *oder* $\max(D) \succ \max(C)$:

   $I_D \models C \;\Leftarrow I_{D'} \models C \;\Leftarrow I_N \models C$.

5. $C = C' \vee A$ *produziert* $A \;\Rightarrow I_N \not\models C'$.

Widerspruchsvollständigkeit von *Res*

Satz 2.23 *Sei $\succ$ eine Klauselordnung, N saturiert unter Res und $\bot \notin N$. Dann gilt $I_N^{\succ} \models N$.*

Proof:

Annahme: $\bot \notin N$ aber $I_N^{\succ} \not\models N$.

Sei $C \in N$ minimal (bzgl. $\succ$), so daß $I_N^{\succ} \not\models C$.

Weil C falsch in I_N ist C nicht produktiv.

Wegen $C \neq \bot$ gibt es ein maximales Atom A in C.

Widerspruchsvollständigkeit von Res

1. Fall: $C = \neg A \vee C'$ (d.h. maximales Atom negativ)

$\Rightarrow I_N \models A$ und $I_N \not\models C'$

$\Rightarrow$ ein $D = D' \vee A \in N$ produziert A

$$\frac{D' \vee A \qquad \neg A \vee C'}{D' \vee C'}$$

liefert $D' \vee C' \in N$ mit $C \succ D' \vee C'$ und $I_N \not\models D' \vee C'$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Minimalität von C.

2. Fall: $C = C' \vee A \vee A \quad \Rightarrow \frac{C' \vee A \vee A}{C' \vee A}$ liefert kleineres Gegenbeispiel $C' \vee A \in N$. Widerspruch.

Widerspruchsvollständigkeit von *Res*

Korollar 2.24 *Sei N saturiert unter Res. Dann gilt $N \models \bot \ \Leftrightarrow \ \bot \in N$.*