

Übungen “Automatisches Beweisen”
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

Bestimme welche der folgenden Formeln erfüllbar/gültig/ungültig sind:

1. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
2. $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
3. $\neg(P \wedge \neg\neg P)$
4. $Q \rightarrow \neg Q$
5. $\neg\neg Q \rightarrow Q$
6. $\neg(\neg P \vee \neg\neg P) \vee P$
7. $[(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)] \rightarrow (Q \vee R)$

Aufgabe 1.2

Sei For_1 die Menge aller Formeln, die mit Variablen in Π , \perp , \top , \neg , \vee , \wedge gebildet sind. Wir definieren eine Funktion $\widehat{\cdot} : \text{For}_1 \rightarrow \text{For}_1$, die zu einer Formel in For_1 die *duale Formel* liefert:

$$\begin{aligned}\widehat{P} &= P && \text{falls } P \in \Pi \\ \widehat{\neg F} &= \neg \widehat{F} \\ \widehat{\perp} &= \top \\ \widehat{\top} &= \perp \\ \widehat{F \vee G} &= \widehat{F} \wedge \widehat{G} \\ \widehat{F \wedge G} &= \widehat{F} \vee \widehat{G}\end{aligned}$$

(1) Welche sind die duale folgender Formeln:

- (a) $\neg(P \vee Q)$;
- (b) $\neg(P \wedge \neg\neg(Q \vee R))$;
- (c) $\neg P \wedge (\neg\neg Q \vee R)$;
- (d) $\neg P \vee Q$;
- (e) $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

(2) Beweise, dass für alle Formeln $F, G \in \text{For}_1$, $\models F \leftrightarrow G$ genau dann, wenn $\models \widehat{F} \leftrightarrow \widehat{G}$.
(Der Dualitätssatz)

Aufgabe 1.3

Seien F_1, \dots, F_n, G Formeln. Zeige, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

- (a) $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
- (b) $(\bigwedge_{i=1}^n F_i) \Rightarrow G$ ist eine Tautologie.
- (c) $(\bigwedge_{i=1}^n F_i) \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.