Harald Ganzinger
Jürgen Stuber

Saarbrücken, 6.1.97
Abgabe bis Montag, 13.1.97, 11:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Informatik III

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 (4P)
Betrachte die Ackermannfunktion:

$$ack(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{falls } x = 0, \\ ack(x-1,1) & \text{falls } x > 0 \text{ und } y = 0, \text{ und} \\ ack(x-1, ack(x,y-1)) & \text{falls } x > 0 \text{ und } y > 0. \end{cases}$$

(a) Finde geschlossene Formen für $ack(x,y)$ für $1 \leq x \leq 3$. Für $x = 0$ ist das zum Beispiel nach Definition $ack(x,y) = y+1$.

(b) Bestimme $ack(4,3)$.

(c) Zeige, daß die Funktionen $ack_x(y) = ack(x,y)$ für alle $x \geq 0$ primitiv rekursiv sind!

Aufgabe 10.2 (3P)
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, daß man verschränkte primitive Rekursion auf die einfache primitive Rekursion zurückführen kann. Die verschränkte primitive Rekursion ist wie folgt definiert:

$$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_k) = \text{primrek}(\vec{g}, \vec{h})$$

wobei

$$f_i(0, \vec{x}) = g_i(\vec{x})$$
$$f_i(n+1, \vec{x}) = h_i(f_1(n, \vec{x}), \ldots, f_k(n, \vec{x}))$$

Gegeben seien Funktionen $\text{enc}^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $\text{dec}^k_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für $n \geq 0$ und $1 \leq i \leq n$. enc^k kodiert ein n-Tupel von natürlichen Zahlen in eine Zahl, und dec^k_i dekodiert aus einem so kodierten n-Tupel die i-te Zahl. Also $\text{dec}^k_i(\text{enc}^k(x_1, \ldots, x_k)) = x_i$.

Zeige, wie man mit Hilfe solcher Funktionen verschränkte primitive Rekursion auf die einfache primitive Rekursion zurückführen kann.

Bemerkung: Es gibt geeignete primitiv rekursive Funktionen enc^k und dec^k_i. Wer mag, kann sich mal an der Konstruktion versuchen.

Aufgabe 10.3 (3P)
Wir definieren einen beschränkten μ-Operator μ_0 wie folgt:

$$\mu_0(f,g)(\vec{x}) = \min\left(\{n \mid g(n,\vec{x}) = 0\} \cup \{f(\vec{x})\}\right)$$

f berechnet also eine obere Schranke, bei der die Suche nach einer Nullstelle von g abgebrochen wird.

(a) Zeige, daß $\mu_0(f,g)$ primitiv rekursiv (bzw. LOOP-berechenbar) ist, falls f und g primitiv rekursiv sind.

(b) Was bedeutet das zusammen mit 10.1(c) für praktisch auftretende totale Funktionen?