Aufgabe 1 *(Algebren und Semantik)* (3 + 4 + 4 = 11 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, so daß Ω mindestens ein Konstantensymbol enthält; sei

$$\mathcal{A} = (U,\ (f_{\mathcal{A}} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega},\ (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

eine Σ-Algebra. Ein Element $a \in U$ heißt *termgeneriert*, falls ein Σ-Grundterm t existiert, so daß $a = \mathcal{A}(\beta)(t)$ für irgendeine Zuweisung β. (Man beachte: falls t ein Grundterm ist, dann ist $\mathcal{A}(\beta)(t) = \mathcal{A}(\beta')(t)$ für alle Zuweisungen β und β'.) Die Menge aller termgenerierten Elemente von U wird durch $\hat{U}$ bezeichnet.

Teil (a)

Beweisen Sie: Falls $f/n \in \Omega$ und $a_1, \dots, a_n \in \hat{U}$, dann ist $f_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in \hat{U}$.

Teil (b)

Für $f/n \in \Omega$ und $a_1, \dots, a_n \in \hat{U}$ definieren wir $f_{\hat{\mathcal{A}}}(a_1, \dots, a_n) = f_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$; für $p/m \in \Pi$ definieren wir $p_{\hat{\mathcal{A}}} = p_{\mathcal{A}} \cap \hat{U}^m$. Nach Teil (a) ist

$$\hat{\mathcal{A}} = (\hat{U},\ (f_{\hat{\mathcal{A}}} : \hat{U}^n \to \hat{U})_{f/n \in \Omega},\ (p_{\hat{\mathcal{A}}} \subseteq \hat{U}^m)_{p/m \in \Pi})$$

eine Σ-Algebra. Ein trivialer Induktionsbeweis zeigt, daß $\mathcal{A}(\beta)(G) = \hat{\mathcal{A}}(\beta)(G)$ für jede quantorenfreie Σ-Formel G und jede Zuweisung $\beta : X \to \hat{U}$. Benutzen Sie dieses Resultat, um die folgende Proposition zu beweisen: Falls F eine geschlossenene pränexe Σ-Formel ohne Existenzquantoren ist und $\mathcal{A} \models F$ gilt, dann gilt auch $\hat{\mathcal{A}} \models F$.

Teil (c)

Die Eigenschaft aus Teil (b) gilt *nicht* für Formeln *mit Existenzquantoren*. Geben Sie ein Beispiel einer Signatur Σ, einer Σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einer geschlossenenen pränexen Σ-Formel F, so daß $\mathcal{A} \models F$, aber $\hat{\mathcal{A}} \not\models F$.

Aufgabe 2 *(Formeltransformationen, SML)* (6 Punkte)

Ein Quantor Qx in einer Formel $Qx\,G$ ist überflüssig, falls alle Vorkommen von x in G gebunden in G sind, oder in anderen Worten, falls kein Vorkommen von x in der Formel durch Qx selbst gebunden wird. Zum Beispiel sind die beiden unterstrichenen Quantoren in der Formel

$$\forall y\, \underline{\exists x}\, (p(y) \lor \underline{\forall z}\, \forall x\, q(y, x))$$

überflüssig. Schreiben Sie eine SML-Funktion `dropquant : wff -> wff`, die eine Formel F als Argument bekommt und jede Teilformel $Qx\,G$ in F durch G ersetzt, sofern Qx ein überflüssiger Quantor ist. Sie können die Datentypen und Hilfsfunktionen aus der Musterlösung zu Übungsaufgabe 1.5 verwenden (siehe Anhang).

Aufgabe 3 *(Resolution)* (6 Punkte)

Zeigen Sie durch Resolution, daß die folgende Formel gültig ist:

$$\Big(\forall x\, \forall y\, \big(p(y, f(f(x))) \rightarrow p(y, x)\big)\Big) \rightarrow \Big(\big(\exists x\, \neg p(x, f(x))\big) \vee \big(\forall x\, p(f(x), x)\big)\Big)$$

Aufgabe 4 *(Herbrand-Interpretationen)* (2 + 3 = 5 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, wobei $\Omega = \{b/0,\ c/0\}$ und $\Pi = \{p/1,\ q/2\}$.

Teil (a)

Wieviele verschiedene Herbrand-Interpretationen über Σ gibt es? Erläutern Sie kurz.

Teil (b)

Wieviele verschiedene Herbrand-Modelle über Σ besitzt die allquantifizierte Klausel $\forall x\, (\neg p(c) \vee q(x, b))$? Erläutern Sie kurz.

Aufgabe 5 *(Redundanz)* (8 Punkte)

Zeigen Sie: Falls N eine (möglicherweise unendliche) Menge von Grundklauseln ist, und falls jede Klausel aus N redundant in N ist, dann ist jede Klausel aus N eine Tautologie.

Aufgabe 6 *(Ordnungen, Redundanz)* (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Sei N die folgende Menge von Grundklauseln:

$$\neg p_2 \vee p_1 \qquad (1)$$
$$\neg p_3 \vee \neg p_1 \qquad (2)$$
$$p_4 \vee p_4 \vee p_1 \qquad (3)$$
$$p_2 \vee \neg p_1 \vee p_1 \qquad (4)$$
$$\neg p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2 \qquad (5)$$

Teil (a)

Sei die Ordnung auf Atomen definiert durch $p_4 \succ p_3 \succ p_2 \succ p_1$. Sortieren Sie die Klauseln in N bezüglich $\succ_{\mathrm{C}}$.

Teil (b)

Sei $\succ$ definiert wie in Teil (a). Welche Klauseln in N sind redundant in N bezüglich $\succ$ und welche nicht?

Teil (c)

Finden Sie eine andere totale Atomordnung $\succ'$ mit der Eigenschaft, daß Klausel (2) maximal und Klausel (3) minimal in N bezüglich $\succ'_{\mathrm{C}}$ ist.